## 7.5.1 Středová a obecná rovnice kružnice

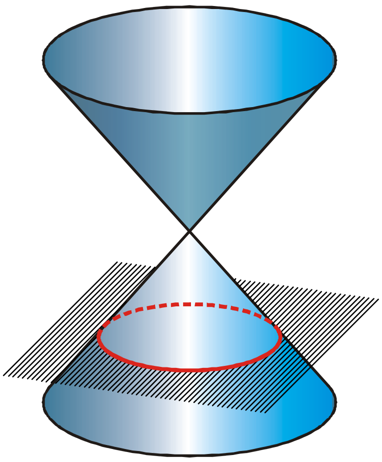
**Předpoklady:** kružnice, 2505, 7103, 7304

**Pedagogická poznámka:** Pro tuto hodinu (a mnoho dalších hodin v kapitole o kuželosečkách) je rozhodující, aby studenti uměli dobře doplňovat na čtverec. Je dobré jim dát na konci předchozí hodiny jeden dva příklady a v případě, že jim budou dělat problémy, probrat ještě jednou hodinu 2505.

Dosud jsme v analytice počítali pouze s přímými čarami. Samozřejmě existuje i spousta útvarů, které nejsou složeny pouze z přímých čar.
Čarám, které nejde rozložit na přímé úseky se říká křivky. Mezi nejsnáze popsatelné křivky patří **kuželosečky** – křivky, které vzniknou, když rovina seče kuželovou plochu (samo se vysvětlující termín).

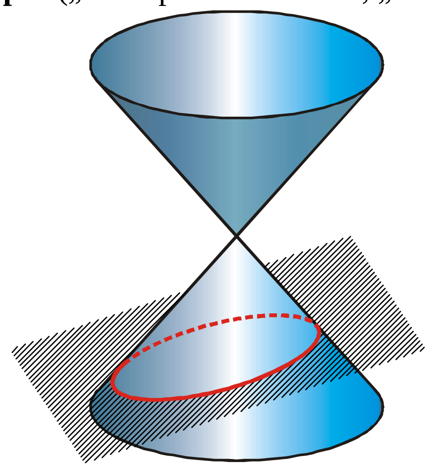
**Př. 1:** Sepiš všechny kuželosečky, které znáš. Načrtni polohu, ve které sečná rovina seče kuželovou plochu, aby vznikla daná kuželosečka.

**Kružnice**



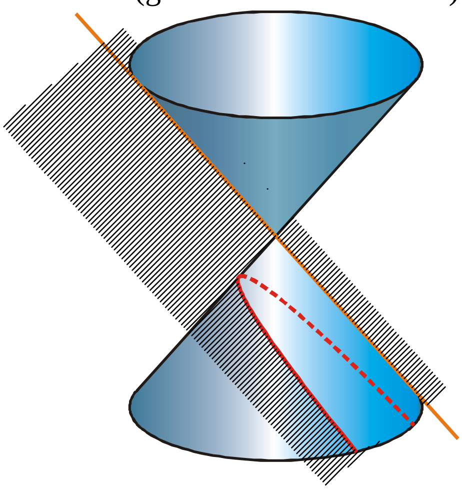
Sečná rovina je kolmá k ose kuželové plochy.

**Elipsa** („rozšlápnutá kružnice“, „ovál“)



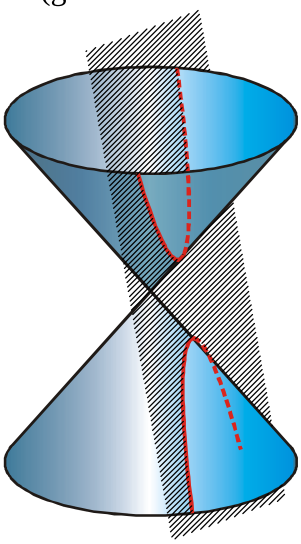
Sečná rovina není kolmá na osu, ale svírá s ní větší úhel než strana kuželové plochy.

**Parabola** (graf kvadratické funkce)



Sečná rovina je rovnoběžná se stranou

**Hyperbola** (graf lineární lomené funkce)



| | |
|---|---|
| kuželové plochy | Sečná rovina svírá s osou kuželové plochy menší úhel než strana. |

Postupně všechny kuželosečky prozkoumáme. Začneme od nejjednodušší – kružnice.

Rovnice přímky $ax+by+c=0$ - podmínka, kterou splňují body na přímce a nesplňují body mimo ní.

Hledáme rovnici kružnice - podmínku, kterou splňují body na kružnici a nesplňují ji žádné jiné body v rovině.
Slovně podmínku známe z planimetrie: kružnice je množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu (středu kružnice) stejnou kladnou vzdálenost (poloměr kružnice)
$\Rightarrow$ zkusíme zapsat podmínku jako rovnici a získaná rovnice bude rovnicí kružnice.

**Př. 2:** Najdi rovnici kružnice se středem $S[2;3]$ a poloměrem $r=2$. Body kružnice zapiš jako $X[x;y]$. Příklad řeš dvakrát do dvou sloupců, v levém sloupci pro zadané hodnoty, v pravé obecně pro $S[m;n]$ a $r$.

Body kružnice jsou od bodu $S[2;3]$ vzdáleny o 2 $\Rightarrow$ zapíšeme jejich vzdálenost pomocí vzorce pro vzdálenost dvou bodů.

$|XS|=2$

$\sqrt{(x-s_x)^2+(y-s_y)^2}=2$

$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=2 \quad /^2$ To už je rovnice hledané kružnice. Odmocnina není hezká $\Rightarrow$ rovnici umocníme.

$(x-2)^2+(y-3)^2=4$

Body kružnice jsou od bodu $S[m;n]$ vzdáleny o $r$ $\Rightarrow$ zapíšeme jejich vzdálenost pomocí vzorce pro vzdálenost dvou bodů.

$|XS|=r$

$\sqrt{(x-s_x)^2+(y-s_y)^2}=r$

$\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}=r \quad /^2$

$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$ - **Rovnice kružnice ve středovém tvaru** (ihned můžem určit střed a poloměr kružnice).

Kružnici $k(S;r)$, kde $S[m;n]$ je možné zapsat ve středovém tvaru rovnicí $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$.

**Př. 3:** Najdi středový tvar rovnice kružnice $k(S;r)$, pokud platí:
a) $S[4;-1]$, $r=1$ b) $S[-1;-2]$, $r=-2$ c) $S[-1;0]$, $r=0{,}5$

a) $S[4;-1]$, $r=1 \Rightarrow (x-4)^2+(y-[-1])^2=1^2$

$(x-4)^2+(y+1)^2=1$

b) $S[-1;-2]$, $r=-2 \Rightarrow$ Rovnici nejde sestavit, kružnice nemůže mít záporný poloměr.

c) $S[-1;0]$, $r=0,5 \Rightarrow (x-[-1])^2+(y-0)^2=0,5^2$

$(x+1)^2+y^2=0,25$

**Př. 4:** Urči střed a poloměr kružnice $k(S;r)$, pokud je dána středovou rovnicí:

a) $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ b) $(x+1)^2+(y-4)^2=-2$

c) $x^2+y^2=\sqrt{3}$ d) $(x+2)^2-(y-1)^2=4$

a) $(x-2)^2+(y+3)^2=9 \Rightarrow S[2;-3]$, $r=\sqrt{9}=3$

b) $(x+1)^2+(y-4)^2=-2 \Rightarrow$ Nejde o rovnici kružnice, protože $\sqrt{-2}$ nemůže být poloměr.

c) $x^2+y^2=\sqrt{3} \Rightarrow S[0;0]$, $r=\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}$

d) $(x+2)^2-(y-1)^2=4 \Rightarrow$ Nejde o rovnici kružnice mezi závorkami není plus.

Rovnici kružnice $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$ jsme nazývali středová $\Rightarrow$ existuje ještě jiný druh rovnice kružnice. Získáme ho, když umocníme závorky:

$(x-2)^2+(y-3)^2=4$

$x^2-4x+4+y^2-6y+9=4$

$x^2-4x+y^2-6y+9=0$

$x^2+y^2-4x-6y+9=0$ - **obecná rovnice kružnice**

**Př. 5:** Najdi obecnou rovnici kružnice, která je dána středovou rovnicí $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$.

Jenom umocníme závorky ve tvaru $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$:

$x^2-2mx+m^2+y^2-2ny+n^2-r^2=0$

$x^2+y^2-2mx-2ny+\underbrace{m^2+n^2-r^2}_{p}=0$

$x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$

Je-li kružnice dána středovou rovnicí $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$, nazýváme rovnici $x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$, kde $p=m^2+n^2-r^2$ **obecnou rovnicí** této kružnice.

Jaké má obecná rovnice výhody? Nejsou tam závorky.
Nevýhody? Není z ní poznat, o jakou kružnici jde. $\Rightarrow$ Je to vlastně výhoda, dá se na to vymyslet spousta příkladů.

**Př. 6:** Najdi střed a poloměr kružnice dané obecnou rovnicí $x^2+y^2+4x-8y-5=0$.

Střed a poloměr dokážeme určit ze středové rovnice $\Rightarrow$ musíme obecnou rovnici předělat na středovou $\Rightarrow$ musíme sestavit závorky (vyrobit vzorec $A^2+2AB+B^2$):

$$A^2+2AB+B^2 \qquad A^2-2AB+B^2$$

$$x^2+y^2+4x-8y-5=x^2+2x\cdot 2+\underbrace{2^2-2^2}_{0}+y^2-2y\cdot 4+\underbrace{4^2-4^2}_{0}-5=$$

$$\left(x+2\right)^2-4+\left(y-4\right)^2-16-5=\left(x+2\right)^2+\left(y-4\right)^2-25=0$$

$\left(x+2\right)^2+\left(y-4\right)^2=25 \Rightarrow$ Kružnice má střed v bodě $S\left[-2;4\right]$ a poloměr $r=\sqrt{25}=5$.

**Př. 7:** Urči středy a poloměry kružnic, které jsou dány následujícími rovnicemi:

a) $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ b) $x^2+y^2-4x-4=0$

c) $x^2+y^2-4x-6y+20=0$ d) $x^2+y^2-3x-4y=0$

e) $x^2-\frac{1}{2}x+y^2-8y+13=0$

a) $x^2+y^2-2x+6y+6=0$

$$x^2+y^2-2x+6y+6=x^2-2x+y^2+6y+6=$$

$$x^2-2x\cdot 1+1^2-1^2+y^2+2y\cdot 3+3^2-3^2+6=$$

$$\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2-4=0$$

$\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2=4 \Rightarrow$ Kružnice má střed v bodě $S\left[1;-3\right]$ a poloměr $r=\sqrt{4}=2$.

b) $x^2+y^2-4x-4=0$

$$x^2+y^2-4x-4=x^2-4x+y^2-4=x^2-2x\cdot 2+2^2-2^2+y^2-4=$$

$$\left(x-2\right)^2+y^2-8=0$$

$\left(x-2\right)^2+y^2=8 \Rightarrow$ Kružnice má střed v bodě $S\left[2;0\right]$ a poloměr $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

c) $x^2+y^2-4x-6y+20=0$

$$x^2+y^2-4x-6y+20=x^2-2x\cdot 2+2^2-2^2+y^2-2y\cdot 3+3^2-3^2+20=$$

$$\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2+7=0$$

$\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=-7 \Rightarrow$ Nejde o rovnici kružnice, druhá mocnina poloměru nemůže být záporná.

d) $x^2+y^2-3x-4y=0$

$$x^2+y^2-3x-4y=x^2-2x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+y^2-2y\cdot 2+2^2-2^2=$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-2\right)^2-\frac{25}{4}=0$$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4} \Rightarrow$ Kružnice má střed v bodě $S\left[\frac{3}{2};2\right]$ a poloměr $r=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$.

e) $x^2-\frac{1}{2}x+y^2-8y+13=0$

$$x^2-\frac{1}{2}x+y^2-8y+13=x^2-2x\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2+y^2-2y\cdot4+4^2-4^2+13=$$

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+(y-4)^2-\frac{1}{16}-3=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+(y-4)^2-\frac{49}{16}=0$$

$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+(y-4)^2=\frac{49}{16} \Rightarrow$ Kružnice má střed v bodě $S\left[\frac{1}{4};4\right]$ a poloměr $r=\sqrt{\frac{49}{16}}=\frac{7}{4}$.

**Pedagogická poznámka:** Pokud hodina probíhá normálně, většina třídy bude končit s předchozím příkladem, Ti nejrychlejší stihnou následující. Se zbytkem třídy si jeho řešení kontrolujeme na začátku příští hodiny.

**Př. 8:** Rozhodni o pravdivosti následujících vět:
a) Každou kružnici je možné zapsat pomocí obecné rovnice kružnice.
b) Každá rovnice tvaru $x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$ (všechny koeficienty jsou reálná čísla) je obecnou rovnicí kružnice.

a) Každou kružnici je možné zapsat pomocí obecné rovnice kružnice.
Věta je pravdivá. Každou kružnici můžeme zapsat pomocí středové rovnice. Při převádění ze středové rovnice na obecnou jsme pouze umocňovali a sčítali. Tyto úpravy je možné provést pro všechna reálná čísla $\Rightarrow$ Vždy se nám podaří převést středovou rovnici na obecnou a tedy zapsat libovolnou kružnici pomocí obecné rovnice.

b) Každá rovnice tvaru $x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$ (všechny koeficienty jsou reálná čísla) je obecnou rovnicí kružnice.
Věta určitě neplatí. V předchozím příkladu rovnice $x^2+y^2-4x-6y+20=0$ nešla převést na středovou rovnici kružnice, na pravé straně vyšlo záporné číslo $\Rightarrow$ Rovnice $x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$ je rovnicí kružnice pouze v případě, že po provedení úprav získáme na pravé straně kladné číslo, které je možné interpretovat jako druhou mocninu poloměru kružnice.

**Př. 9:** (BONUS): Najdi podmínku, kterou musí splňovat parametry *m*, *n*, *p*, aby rovnice $x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$ byla obecnou rovnicí kružnice.

Provedeme úpravy a zkontrolujeme znaménko na pravé straně.

$$x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$$

$$x^2-2mx+m^2-m^2+y^2-2ny+n^2-n^2+p=0$$

$$(x-m)^2+(y-n)^2-m^2-n^2+p=0$$

$$(x-m)^2+(y-n)^2=m^2+n^2-p$$

$\Rightarrow$ musí platit $m^2 + n^2 - p > 0$.

**Dodatek:** Pokud máme rovnici $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$ upravenou do tvaru $(x-m)^2 + (y-n)^2 = m^2 + n^2 - p$, pravá strana rovnice má význam vzdálenosti $|XS|$ a mohou tedy nastat tři možnosti:

1. $m^2 + n^2 - p > 0$ $\Rightarrow$ Jde o rovnici kružnice se středem $S[m;n]$ a poloměrem $r = \sqrt{m^2 + n^2 - p}$.
2. $m^2 + n^2 - p = 0$ $\Rightarrow$ Platí $|XS| = 0$ $\Rightarrow$ rovnici splňuje jediný bod $S[m;n]$
3. $m^2 + n^2 - p < 0$ $\Rightarrow$ Platí $|XS| < 0$ $\Rightarrow$ rovnici nesplňuje žádný bod v rovině.

**Př. 10:** Petáková:
strana 128/cvičení 74 b) d) e) f)

**Shrnutí:** Středová rovnice kružnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ vyjadřuje podmínku konstantní vzdálenosti bodů kružnice od jejího středu.